倍数判定法（続）

「倍数判定法」の２回目です。前回の「７の倍数判定法」は初めて知った人も多いと思います。今回は，２桁の整数（17 以下の素数）の倍数判定法にチャレンジしたいと思います。

$\boxed{7-2}$. ３桁の整数の７の倍数判定法 →

百の位の数を２倍して下２桁の数と加えた結果が，７の倍数である。

具体的な例としては，924 の場合，まず 9：24 と百の位の数と2桁の数に区切り，$9\times2+24$ を計算すると, 42 となり，7の倍数です。したがって，924 も 7 の倍数となります。（$924=7\times132$） 理由は，合同式により, $100\equiv2\ (mod\ 7)$であり，$924=9\times10^2+24=9\times(98+2)+24=7\times14\times9+9\times2+24$ となります。つまり, $924\equiv9\times10^2+24\equiv9\times2+24\ (mod\ 7)$ であり，$9\times2+24$ が 7 の倍数であるかどうかを調べればよいのです。さあ，これで7の倍数判定が早くなります。
$316{,}898{,}764\equiv764-898+316\equiv182\equiv1\times2+82=84\equiv0\ (mod\ 7)$ となり, 316,898,764 が7の倍数であることがわかりました。($316{,}898{,}764=7\times45{,}271{,}252$) 国際的に数字は3桁ごとにコンマで区切って表示されますから，やりやすいといえます。 0にならなければ，その数が7で割った余りの数です。
7は1週間の日数です。ですから，924日は132週，316,898,764 日は 45,271,252 週です。これは 867,621年にもなります。($316{,}898{,}764\div365.25$ として計算しました。厳密ではありませんが…。) 興味深いですね。

$\boxed{8}$. 11 の倍数は，各位の数について，下１桁から奇数番目はプラス，偶数番目はマイナスとして加えた結果が，０か 11 の倍数である。

11 の場合も合同式を使いましょう。$10\equiv-1\ (mod\ 11)$ より，$10^2\equiv(-1)^2\equiv1$，$10^3\equiv(-1)^3\equiv-1$，… となりますから，11，99，1,001，9,999，100,001，…… と交互に 11 の倍数が現れます。
m を自然数とすると，$10^{2m-1}+1\equiv0$，$10^{2m}-1\equiv0\ (mod\ 11)$ となります。
よって，5桁の数 N で 万の位, 千の位, 百の位, 十の位, 一の位の数をそれぞれ a，b，c，d，eとすると，$N=10^4\times a+10^3\times b+10^2\times c+10\times d+e\equiv a-b+c-d+e$ となり，下1桁から奇数番目をプラス，偶数番目をマイナスとして計算した数 $a-b+c-d+e$ が，N を11で割った余りであり，上記の判定法 が正しいことがわかりました。

$\boxed{9}$. 13 の倍数は，下の位から３桁ごとに区切って，符号を変えながら（下から奇数番目はﾌﾟﾗｽ，偶数番目はﾏｲﾅｽとして）加えた結果が，０か 13 の倍数である。

13の倍数判定法は「７の倍数判定法」と同じです。$10-3=7$，$10+3=13$ と関係がありそうです。$10\equiv-3\ (mod\ 13)$ で，$10^3\equiv(-3)^3\equiv-27\equiv-1\ (mod\ 13)$ となり，$10^3+1=1001$ は 13 の倍数です。以下，$10^6\equiv(10^3)^2\equiv(-1)^2\equiv1$，$10^9\equiv(-1)^3\equiv-1\ (mod\ 13)$ ……
となりますから，12桁の数 N が，$N=a\times10^9+b\times10^6+c\times10^3+d$ と表せた場合，
$N\equiv-a+b-c+d$ となり，a，b，c，d は「下の位から３桁ごとに区切った数」ですから，
$d-c+b-a$ が 13 の倍数であれば，N も13の倍数であることが わかります。
例をあげると，$987{,}654{,}330\equiv330-654+987\equiv663\equiv0\ (mod\ 13)$ となり，987,654,330 が 13 の倍数であることがわかりました。（$987{,}654{,}330=13\times75{,}973{,}410$ ）
なお，3桁の数の「13の倍数判定」は，663 ならば，6：63 と百の位の数と2桁の数に区切り，$6\times(-4)+63$ を計算すると，39 となり，13の倍数です。したがって，663 も 13 の倍数となります。理由は，$104=13\times8$ であり，$10^2\equiv-4\ (mod\ 13)$ であるからです。
$663\equiv6\times10^2+63\equiv6\times(-4)+63\equiv39\equiv0\ (mod\ 13)$ です。 覚えれば使いやすいです。

$\boxed{10}$. 17 の倍数は，下の位から２桁ごとに区切って，下から１番目はそのまま，２番目はﾏｲﾅｽ２をかけ，３番目は４をかけ，４番目はﾏｲﾅｽ８をかけ，５番目はﾏｲﾅｽ１をかけ，６番目は２をかけ，７番目はﾏｲﾅｽ４をかけ，８番目は８をかけ，……として，加えた結果が，０か 17 の倍数である。

さあ，今回の最後は「17 の倍数判定法」です。まず $102=17\times6$ より，$10^2\equiv-2\ (mod\ 17)$，$10^4\equiv(-2)^2\equiv4$，$10^6\equiv(-2)^3\equiv-8$，$10^8\equiv(-2)^4\equiv16\equiv-1$，$10^{10}\equiv-(-2)\equiv2$…… $(mod\ 17)$ となっていくので，12桁の数 N が，$N=a\times10^{10}+b\times10^8+c\times10^6+d\times10^4+e\times10^2+f$ と表せた場合，$N\equiv2a-b-8c+4d-2e+f$ となるので，上記の判定法のようになります。
例をあげると，$11123457\equiv57-2\times34+4\times12-8\times11\equiv-51\equiv0\ (mod\ 17)$ となり，11123457 が17の倍数であることがわかりました。（$11123457=17\times654321$）
ちなみに，3桁の数の「17の倍数判定」はもうわかりますね。986 ならば，9：86 と百の位の数と2桁の数に区切り，$986\equiv9\times(-2)+86=68\equiv0\ (mod\ 17)$ という方法で，986が 17の倍数であることがわかります。かなり強引ですが，合同式の威力がよくわかったことでしょう。整数問題には積極的に合同式（mod）を使っていきましょう。強力な道具です。　以 上